２０１９年　一橋大　第３問

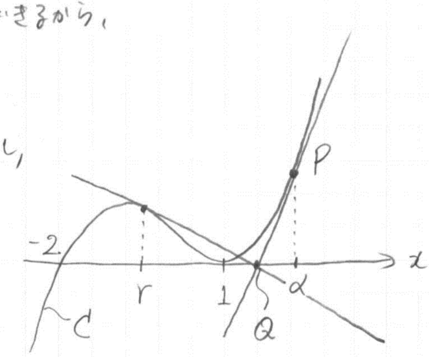
(1)　$y=(x-1)^2(x+2)$　と変形できるから，

Cの概形は，図の通り．

点Qを通る接線を l_Q とし，

Cと l_Q との接点を

$(t, f(t))$　とすると，



l_Q：$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$\quad =(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t+2$

$\therefore\ y=(3t^2+3)x-2t^3+2$　――①

ここで，点 $Q(u, 0)$　とおくと，l_Q とCとの接点のx座標は，

$0=(3t^2+3)u-2t^3+2$　――②

の解により得られる。

グラフから，l_Q は明らかに　$x=1$ と α で　Cに接するから，

②の解のうち２つは　$t=1, \alpha$　である。

残りの解を r とすると，②の t の１次の項の係数が０だから，

$1\cdot\alpha+\alpha\cdot r+r\cdot 1=0$

$r(1+\alpha)=-\alpha$　より　$r=-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$　――③

すなわち，l_Q とCとの接点のx座標は，

$x=1,\ \alpha,\ -\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$　である。

それぞれの場合の　l_Q の傾きは，$f'(x)=3x^2-3$ より，

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(\alpha)=3\alpha^2-3=3(\alpha^2-1)>0\quad(\because \alpha>0) \\ f'\left(-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)^3-3=\dfrac{-6\alpha-3}{(1+\alpha)^2}<0\quad(\because \alpha>1) \end{cases}$$　――④

以上から，$f'\left(-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)<f'(1)<f(\alpha)$ より，

求めるx座標は，

$x=-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$　(答)

(2) $a=2$ のとき、(1) より、l は $x=-\frac{2}{3}$ で C と接する。

$x=-\frac{2}{3}$ 以外の l と C の共有点を $(u, f(u))$ とし、

求める面積を S とすると、

$$S=\int_{-\frac{2}{3}}^{u}\{(l\text{の式})-(C\text{の式})\}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{2}{3}}^{u}-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2(x-u)\,du$$

$$=\frac{1}{12}\left(u+\frac{2}{3}\right)^4 \quad —— ⑤$$

ここで、$(l\text{の式})=(C\text{の式})$

すなわち $(3t^2-3)x-2t^3+2=x^3-3x+2$ (但し、$t=-\frac{2}{3}$) —— ⑥

の解が $x=u$, $-\frac{2}{3}$ (重解) であることから、

x^2 の係数に注目して、

$$u+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=0 \quad つまり \quad u=\frac{4}{3} \quad —— ⑦$$

を得る。

⑤, ⑦ より、

$$S=\frac{1}{12}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)^4=\frac{1}{12}\cdot 2^4=\frac{4}{3}$$ (答)