【２０１９年　京都大・理系（第２問)】

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(30 点)

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

京都大らしい問題です。問われている内容も分かりやすいです。

しかし、「素数」と言われると、いったい何をやったらいいかよく分からないかもしれません。しかし、実は、受験数学的には、素数がらみの問題には解きやすいものが多いのです。どういうことかというと、次のような素数の特徴に関係があります。

素数とは、「１とその数のほかに、正の約数をもたない数」である。

例えば、５という数は、１とその数である５の他に正の約数をもちません。また、偶数の素数は、２しかありません。

このような特徴から、「素数」に関する問題は、約数に注目して検討してみるのが良いのです。というか、それ以外に、あまりやりようがないのです。

ではさっそく、問題に取り組んでみましょう。

まず、検討の対象として、$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ が指示されていますので、それぞれ書き出してみます。

$$f(n)=n^3+2n^2+2$$
$$f(n+1)=(n+1)^3+2(n+1)^2+2=n^3+5n^2+7n+5$$

つまり、

$$|f(n)|=|n^3+2n^2+2| \quad \cdots\cdots①$$
$$|f(n+1)|=|n^3+5n^2+7n+5| \quad \cdots\cdots②$$

となります。これらがともに整数となるような整数 n を求めればよいのです。

では、具体的に見てみましょう。

これらの２つの式を見て、何か気づくことはありませんか？

数学の指導をしていて、初見の問題を解くときに重要ですよとお伝えしていることがあります。それは、「問題の特殊性に着目する」ということです。

この問題の特殊性はどこにあるでしょうか。それは、

式①の絶対値の中身が　$n^3 + \textit{偶数}$

式②の絶対値の中身が　$n^3 + \textit{奇数}$

となっていることです。このことから、次のことが分かります。

n^3が偶数（つまり n が偶数）ならば、式①は偶数になる。
n^3が奇数（つまり n が奇数）ならば、式②は偶数になる。

要するに、n が偶数であれ奇数であれ（つまりどのような数でも）、①②の２つの式の一方が偶数になります。

ところで、問題によれば、①②とも、素数にならなければなりません。すると、題意を満たすためには、偶数になる方の式の値も素数でなければありませんから、その値は２でなければなりません（必要条件）。
なぜならば、冒頭で述べたように、偶数のなかで素数である数は、２しかないからです。

以下、具体的に n の値を求めていきましょう。

（場合分け１）
n が偶数のとき、$|f(n)| = |n^3 + 2n^2 + 2| = 2$ ですから、絶対値を外すと、

$$n^3 + 2n^2 + 2 = 2 \quad \text{または} \quad n^3 + 2n^2 + 2 = -2 \quad \cdots\cdots③$$

これは、いわゆる高次方程式です。具体的な解を１つ見つけて、それをもとに因数分解をしていけばよいですね（数学 II の「複素数と方程式」の単元です）。
この方程式を解くと、③の第１式から、$n = 0, -2$ が得られます。これらの２つの解は、いずれも偶数ですから、＜ n が偶数のとき＞という前提条件に合致しており、適解です。一方、③の第２式からは、整数解は得られません（→注１）。

（場合分け２）

nが奇数のとき、$|f(n+1)|=|n^3+5n^2+7n+5|=2$　ですから、絶対値を外すと、

$$n^3+5n^2+7n+5=2 \quad \text{または} \quad n^3+5n^2+7n+5=-2 \quad \cdots\cdots④$$

この方程式を解くと、④の第１式から、$n=-1,-3$ が得られます。これらの２つの解は、いずれも奇数ですから、＜ｎが奇数のとき＞という前提条件に合致しており、適解です。一方、④の第２式からは、整数解は得られません（→注２）。

というわけで、題意を満たすｎの候補（必要条件）として、

$$n=0,-1,-2,-3$$

が得られました。

これらの値は、$|f(n)|$と$|f(n+1)|$のうち一方が素数２になるという条件のみから得られた値ですので、他方の値がちゃんと素数になるかどうかはこの時点ではわかりません。ですから、「候補（必要条件）」という表現をしました。以下、他方が素数になるか否か確認していきます。

ｎ＝０のとき、$|f(n+1)|=|f(0+1)|=5$　（素数）
ｎ＝－２のとき、$|f(n+1)|=|f(-2+1)|=3$　（素数）
ｎ＝－１のとき、$|f(n)|=|f(-1)|=3$　（素数）
ｎ＝－３のとき、$|f(n)|=|f(-3)|=7$　（素数）

以上から、 $n=0,-1,-2,-3$ は、いずれも題意を満たす（十分条件である）ことが確認されましたから、これらが求めるｎの値に他なりません。　　　（おわり）

いかがでしたでしょうか。難関大の数学は、このような雰囲気（？）です。

この問題は、いわゆるパターン問題として問題集に掲載されている問題ではありません。ですから、この問題に関しては、式を見て、いずれか一方の式の値が必ず偶数になる、ということに気づく必要があります。そのような感覚を養うためには、普段から、目の前の式の意味を考える習慣をつけておくことが大切だと思います。

それともう１つ、パターン問題は出題されないと書きましたが、それは、パターン問題を軽視してよいという意味ではありません。いろいろな問題に対してその場で解き方の糸口を見つけるためには、パターン問題をひととおり解けるようにしておくこことは不可欠です。まずは教科書傍用問題集をしっかりとマスターしていってください。

（注１）

式③の第１式：$n^3+2n^2+2=-2$　から整数解が得られるか否かは、次のように考えるとよいでしょう。式を変形すると、

$$n^3+2n^2+2=-2 \quad \text{つまり、} \quad n^2(n+2)=-4 \quad \cdots\cdots⑤$$

となります。これは、n^2と$(n+2)$の積が－４になるということを意味します。

　したがって、もし、⑤を満たす整数解が存在するならば、n^2が０以上であることを考慮すると、$n^2=1,\ 4$　のいずれか、つまり、

$$n=1,-1,2,-2$$

のいずれかでなければなりません。

　ところが、これらのｎの値は、いずれも⑤を満たしません。したがって、式⑤（つまり、式③の第２式）は整数解をもたないことが分かります。

（注２）

　（注１）と同様です。式④の第２式を変形すると、

$$n^3+5n^2+7n=-7 \quad \text{つまり、} \quad n(n^2+5n+7)=-7 \quad \cdots\cdots⑥$$

となります。

　したがって、もし⑥を満たす整数解が存在するならば、ｎは－７の約数、つまり、

$$n=1,-1,7,-7$$

のいずれかでなければなりません。

　ところが、これらのｎの値は、いずれも⑥を満たしません。したがって、式⑥（つまり、式④の第２式を満たす整数解は存在しないことが分かります。